Über spezielle Kreisnetze und Flächen mit speziellen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

INAUGURAL-DISSERTATION

verfaßt und der

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

der

BAYERISCHEN JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU WÜRZBURG

zur

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

am 11. Februar 1935 vorgelegt von

Willibald Grehn

aus Würzburg.

1 9 3 7

Druck von Gebrüder Memminger Würzburg

Referent:
Professor Dr. Otto Volk.

Die Liouville'schen Flächen sind die einzigen Flächen mit rhombischen Netzen aus geodätischen Linien.[1]) Aus diesem Ergebnis entsteht die Aufgabe der Bestimmung aller rhombisch-geodätischen Netze auf vorgegebenen Flächen, die der Klasse der Liouville'schen Flächen angehören. Für die Ebene ist diese Frage von Herrn Volk[2]) zuerst beantwortet worden, und Herr Perron[3]) und Herr Volk[4]) haben sodann die entsprechende Aufgabe für die Flächen konstanter Krümmung gelöst.

Schon A. Voß, von dem dieser Fragenkreis stammt, hat ihn in der erweiterten Form in Angriff genommen, daß er von Kurven konstanter geodätischer Krümmung ausging. Man erhält so die beiden Aufgaben: Einerseits diejenigen Flächen zu bestimmen, auf denen rhombische Netze aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung existieren, und andererseits die entsprechenden Netze auf den gefundenen Flächen zu bestimmen. Beide Aufgaben sind bis heute nicht vollständig gelöst. Wichtige Beiträge hat Herr Volk in neueren Untersuchungen[5]) geliefert. Durch ihn wurde ich auch veranlaßt speziell Fragen, die sich der genannten Problemstellung einordnen, in Angriff zu nehmen.

In § 1 wird nach der Ableitung der für die rhombischen Kreisnetze auf den Flächen konstanter Krümmung charakteristischen Funktionalgleichung (deren allgemeine Lösung hier nicht gegeben wird) eine Reihe von Spezialfällen auf gemeinsamer Grundlage behandelt. Insbesondere Satz I hängt mit einem Ergebnis von Herrn Volk[6]) zusammen. § 2 beantwortet

---

[1]) A. Voß, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden, Sitz.-Ber. der bayer. Ak. d. Wiss., math.-phys. Klasse, 36 (1906), 247—296.

[2]) O. Volk, Zur Voß'schen Arbeit: Kurvennetze und Laplace'sche Differentialgleichungen, Sitz.-Ber. der bayer. Ak. d. Wiss. 1924, 165—179.

[3]) O. Perron, Über geodätische rhombische Netze auf krummen Flächen, Math. Zeitschr. 24, 170—180.

[4]) O. Volk, Über geodätische rhombische Kurvennetze auf krummen Flächen, insbesondere auf Flächen konstanter Krümmung. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1925.

[5]) Siehe die späteren Zitate im Text.

[6]) O. Volk, Über spezielle Kreisnetze. Sitz.-Ber. der bayer. Ak. d. Wiss., math. naturw. Abt., 1929, 125—134.

die Frage nach allen rhombischen Kreisnetzen der Ebene, die gleichzeitig Kurvennetze ohne Umwege sind. § 3 bezieht sich auf Flächen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung, deren Diagonalkurven bestimmte vorgegebene Eigenschaften haben.

Es sei mir gestattet Herrn Professor Volk für die hilfsbereite und fördernde Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit verbindlichsten Dank zu sagen.

§ 1. Spezielle rhombische Netze aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

Es sei eine Kugel im dreidimensionalen Raum gegeben und in diesem der Vektor $\mathfrak{x}$ mit den rechtwinkligen Komponenten x, y, z so eingeführt, daß die Gleichung der Kugel lautet:

(1) $$\mathfrak{x}^2 = 1.$$

Ist $\mathfrak{U}$ (U_1, U_2, U_3) ein Vektor, dessen Komponenten Funktionen nur von u, $\mathfrak{V}$ (V_1, V_2, V_3) ein Vektor, dessen Komponenten Funktionen nur von v sind (u, v Parameter), so bestimmen

(2) $$\mathfrak{U}\mathfrak{x} = \overline{U}$$

(3) $$\mathfrak{V}\mathfrak{x} = \overline{V},$$

wo $\overline{U}$ bezw. $\overline{V}$ Funktionen von u allein bezw. v allein sind, ein Kreisnetz auf der Kugel (1). Die Parameterkurven u = const., v = const. lassen sich rhombisch anordnen, wenn ist:

(4) $$\mathfrak{x}^2 u : \mathfrak{x}^2 v = U^2(u) : V^2(v) .$$

Dabei können die Normierungsfunktionen U(u), V(v) noch geeignet gewählt werden.

Durch Differentiation der Gleichungen (1), (2), (3) nach u unb v erhält man:

(5. 6, 7)[7] $$\mathfrak{U}\mathfrak{x}u = \overline{U}' - \mathfrak{U}'\mathfrak{x},\ \mathfrak{V}\mathfrak{x}u = 0,\ \mathfrak{x}\mathfrak{x}u = 0$$

(8, 9, 10) $$\mathfrak{U}\mathfrak{x}v = 0,\ \mathfrak{V}\mathfrak{x}v = \overline{V}' - \mathfrak{V}'\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}\mathfrak{x}v = 0$$

Aus (6, 7), bezw. (8, 10) folgt:

$$\mathfrak{x}u = \lambda(\mathfrak{V} \times \mathfrak{x}) \text{ und } \mathfrak{x}v = \mu(\mathfrak{U} \times \mathfrak{x})\ ^{8})$$

---

[7]) Die Striche bedeuten Differentiationen nach den in den betreffenden Funktionen (allein) vorkommenden Veränderlichen.

[8]) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ sei das Vektorprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

mit λ, μ als skalaren Faktoren, die nach (4) durch die Beziehung

$$\lambda^2(\mathfrak{V}\times\mathfrak{x})^2=\mu^2(\mathfrak{U}\times\mathfrak{x})^2$$

oder (nach (1), (2), (3))

$$\frac{1}{U^2}\lambda^2(\mathfrak{V}^2-\overline{V}^2)=\frac{1}{V^2}\mu^2(\mathfrak{U}^2-\overline{U}^2) \tag{11}$$

verbunden sind. λ, μ ergeben sich aus den noch nicht verwendeten Gleichungen (5) und (9):

$$\lambda=\frac{\overline{U}'-\mathfrak{U}'\mathfrak{x}^{9})}{(\mathfrak{U},\mathfrak{V},\mathfrak{x})},\quad \mu=\frac{\mathfrak{V}'\mathfrak{x}-\overline{V}'}{(\mathfrak{U},\mathfrak{V},\mathfrak{x})} \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt:

$$\frac{\mathfrak{U}'\mathfrak{x}-\overline{U}'}{U\sqrt{\mathfrak{U}^2-\overline{U}^2}}=\frac{\mathfrak{V}'\mathfrak{x}-\overline{V}'}{V\sqrt{\mathfrak{V}^2-\overline{V}^2}}$$

Setzt man

$$d\overline{u}=U\sqrt{\mathfrak{U}^2-\overline{U}^2}du,\quad d\overline{v}=V\sqrt{\mathfrak{V}^2-\overline{V}^2}\,do$$

und bezeichnet die Differentiation nach den neuen Parametern u, v ebenfalls durch Striche, so erhält man:

$$(\mathfrak{U}'-\mathfrak{V}')\mathfrak{x}=\overline{U}'-\overline{V}'. \tag{13}$$

Die Elinimation von $\mathfrak{x}$ aus (1), (2), (3) und (13) liefert schließlich die für die rhombischen Kreisnetze auf der Kugel charakteristische Funktionalgleichung:

$$[(\mathfrak{U}'-\mathfrak{V}')\times(\mathfrak{U}\overline{V}-\mathfrak{V}\overline{U})+(\overline{U}'-\overline{V}')(\mathfrak{U}\times\mathfrak{V})]^2=(\mathfrak{U}'-\mathfrak{V}',\mathfrak{U},\mathfrak{V})^2. \tag{14}$$

Durch Spezialisierung der Funktionen $\overline{U}$, $\overline{V}$ erhält man die folgenden Fälle:

I. $\overline{U}=\overline{V}=0$. Man erhält so die geodätischen rhombischen Netze der Kugel. Durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems läßt sich dann immer erreichen, daß keine der Funktionen U_3 und V_3 identisch verschwindet. Es bedeutet also, wie man aus (2), (3) sieht, keine Einschränkung, wenn

$$U_3=V_3=1$$

gesetzt wird. (14) geht dann über in:

$$(U'_1-V'_1)(U_2-V_2)-(U'_2-V'_2)(U_1-V_1)=0. \tag{15}$$

---

[9]) (a, b, c) ist die Determinante der Vektoren a, b, c.

Diese Funktionalabgleichung, deren Lösungen Herr Perron [10]) gegeben hat, ordnet sich dem allgemeinen Typus

$$\sum_{i=1}^{n} U_i V_i = 0 \tag{16}$$

unter, wo U_i bezw. V_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) Funktionen nur von u, bezw. v sind. Für jeden (festen) Wert von v ergibt sich aus (16) eine lineare Beziehung mit konstanten Koëffizienten zwischen den U_i ($i = 1, \ldots, n$). Der Rang m eines jeden so entstehenden Gleichungensystems ist höchstens n. Durch Umnummerieren läßt sich immer erreichen, daß $U_1, U_2, \ldots, U_m$ linear unabhängig und die übrigen U_i ($i = m + 1, \ldots, n$) in der Form

$$U_i = \sum_{k=1}^{m} a_{i-m,k} U_k \qquad (i = m+1, \ldots, n) \tag{17a}$$

darstellbar sind. Aus (16) folgt dann wegen der linearen Unabhängigkeit der U_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) das zu (17a) orthogonale System:

$$V_i + \sum_{k=m+1}^{n} a_{k-m,i} V_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{17b}$$

(17a, b) bilden zusammen das allgemeinste System der Lösungen von (16). Für (15) ist im besonderen $n = 6$ und man hat wegen der Symmetrie nur die Fälle $m = 1, 2, 3$ zu unterscheiden.

1. $m = 1$. V_1 und V_2 sind konstant. Die Schar der Kreise $v = \text{const.}$ artet in einen und denselben Kreis aus und es liegt kein Netz vor.

2. $m = 2$. Die (17a) entsprechenden Beziehungen können wir immer in der Form

$$\begin{aligned} U'_1 U_2 - U'_2 U_1 &= a_{11} U'_1 + a_{12} U_1 + a_{13} U_2 + a_{14} \\ U'_2 &= a_{21} U'_1 + a_{22} U_1 + a_{23} U_2 + a_{24} \end{aligned} \tag{18a}$$

voraussetzen und bekommen nach (17b):

$$\begin{aligned} -V_2 + a_{11} + a_{21} V_1 &= 0 \\ V'_2 + a_{12} + a_{22} V_1 &= 0 \\ -V'_1 + a_{13} + a_{23} V_1 &= 0 \\ V'_1 V_2 - V'_2 V_1 + a_{14} + a_{24} V_1 &= 0 . \end{aligned} \tag{18b}$$

Aus der ersten Beziehung (18b) ersieht man, daß die Kreisschar $v = \text{const.}$ von einem Ebenenbüschel durch den Koordinaten-

---

[10]) O. Perron, Bestimmung aller geradlinigen rhombischen Netze. Münchner Ber. 1924, 181—193.

Vgl. für eine vereinfachte Behandlung:

O. Volk, Über geodätische rhombische Kurvennetze auf krummen Flächen, insbesondere auf Flächen konstanter Krümmung. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1925.

ursprung ausgeschnitten wird. Differenziert man die erste Gl. (18b), berücksichtigt die zweite und zieht zum Vergleich die dritte Gl. (18b) heran, so erhält man

$$a_{21} = -\lambda,\ a_{12} = \lambda a_{13},\ a_{22} = \lambda a_{23}\ (\lambda \text{ Proportionalitätsfaktor}),$$

und

(19) $$V_2 = a_{11} - \lambda V_1,\ V'_2 = -\lambda V'_1.$$

Damit kommt aus der letzten Beziehung (18b):

$$a_{11}V'_1 + a_{24}V_1 + a_{14} = 0, \text{ also:}$$

$$a_{11} = -\sigma,\ a_{14} = \sigma a_{13},\ a_{24} = \sigma a_{23}\ (\sigma \text{ Proportionalitätsfaktor}).$$

(18a) wird somit, wenn man noch $\overline{U}_2 = U_2 + \sigma$ setzt:

$$U'_1\overline{U}_2 - \overline{U}'_2U_1 = a_{13}\ (\lambda U_1 + \overline{U}_2)$$

$$\overline{U}'_2 = a_{23}(\lambda U_1 + \overline{U}_2) - \lambda U'_1,$$

woraus durch Elinimation von $\overline{U}_2$' folgt:

$$(U'_1 - a_{23}U_1 - a_{13})(\lambda U_1 + \overline{U}_2) = 0.$$

Es ist also entweder

(20a) $$\lambda U_1 + \overline{U}_2 = 0$$

oder

(20b) $$U'_1 - a_{23}U_1 - a_{13} = 0, \text{ und damit weiter:}$$

$$\overline{U}'_2 - a_{23}\overline{U}_2 + \lambda a_{13} = 0.$$

Aus (19) und (20) ist ersichtlich, daß die beiden Scharen Büschel sind.

3. $m = 3$. Es dürfen U_1, U_2, 1 als linear unabhängig vorausgesetzt werden, da man sonst auf den 2. Fall zurückkäme. Sei also, entsprechend zu (17a)

$$U'_1U_2 - U'_2U_1 = a_{11}U_1 + a_{12}U_2 + a_{13}$$

(21a) $$U'_1 = a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + a_{23}$$

$$U'_2 = a_{31}U_1 + a_{32}U_2 + a_{33}$$

so ergibt sich analog zu (17b):

$$V'_2 + a_{11} - a_{22}V_2 + a_{31}V_1 = 0$$

(21b) $$-V'_1 + a_{12} - a_{23}V_2 + a_{32}V_1 = 0$$

$$V'_1V_2 - V'_2V_1 + a_{13} - a_{23}V_2 + a_{33}V_1 = 0$$

und durch Elimination von U'_1 U'_2 aus (21a), bezw. V'_1 V'_2 aus (21b) dieselbe quadratische Beziehung zwischen U_1, U_2 bezw. V_1, V_2.

Die Funktionalgleichung (15) ist hiermit auf einem etwas anderen Wege als bisher üblich [11]) behandelt und das bekannte Ergebnis, daß zwei Ebenenscharen durch den Kugelmittelpunkt

[11]) S. auch: O. Volk, Über spezielle Kreisnetze. Sitz.-Ber. der bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1929, 125—134.

die Kugel dann und nur dann in einem rhombischen Netz schneiden, wenn sie entweder zwei Büschel sind oder denselben Kegel zweiter Ordnung umhüllen, bestätigt.

II. Ist nur eine der Funktionen $\overline{U}$ oder $\overline{V}$ identisch Null, so bekommt man diejenigen Kreisnetze, bei denen eine Schar aus Geodätischen, die andere aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung besteht. Da wir uns aber bei unseren Betrachtungen auf den Fall beschränken wollen, bei dem beide das Netz erzeugende Ebenenscharen demselben Ebenenbündel angehören, lassen wir den hier vorliegenden Fall überhaupt beiseite.

III. Verschwindet keine der Funktionen $\overline{U}$, $\overline{V}$ identisch, so kann man

$$\overline{U} = \overline{V} = 1$$

voraussetzen. (14) nimmt dann die Form an:

(22) $$[(\mathfrak{U}' - \mathfrak{V}') \times (\mathfrak{U} - \mathfrak{V})]^2 = (\mathfrak{U}' - \mathfrak{V}', \mathfrak{U}, \mathfrak{V})^2.$$

Wegen der in II. schon genannten Voraussetzung, daß beide Ebenenscharen demselben Bündel angehören sollen, müssen die Vektoren $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ noch einer Beziehung der Form

(23) $$\mathfrak{c}\mathfrak{U} = \mathfrak{c}\mathfrak{V} = 1$$

genügen, wo $\mathfrak{c}$ einen konstanten Vektor bedeutet. Aus (2) und (3) folgt dann zunächst

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \varrho\,(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}),$$

wo ϱ ein Skalar ist, der aus (1) berechnet werden kann. Da sich aus (23) durch Differentiation $\mathfrak{c}\mathfrak{U}' = \mathfrak{c}\mathfrak{V}' = 0$ ergibt, schließt man aus dem obigen Ausdruck für den Vektor $\mathfrak{x}$ unter Berücksichtigung von (13) (wo $\overline{U} = \overline{V} = 1$ zu setzen ist) auf die Beziehung

$$(\mathfrak{U}' - \mathfrak{V}', \mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = 0 \quad , \quad \text{also (nach (22))}$$
$$(\mathfrak{U}' - \mathfrak{V}') \times (\mathfrak{U} - \mathfrak{V}) = 0.$$

Beim Übergang zu Komponenten ergibt sich daraus wieder die Funktionalgleichung (15). Man hat somit

Satz I: Zwei demselben Ebenenbündel angehörende Ebenenscharen schneiden die Kugel genau dann in einem rhombischen Netz, wenn sie entweder zwei Büschel sind oder denselben Kegel zweiter Ordnung umhüllen.

Mittels stereographischer Projektion überträgt sich dieses Ergebnis unmittelbar auf die Ebene.[12]) Insbesondere folgt,

[12]) Vgl. O. Volk, Über spezielle Kreisnetze, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1929, 125—134.

wenn $c^2 = 1$ und als Zentrum der stereographischen Projektion der Endpunkt von c gewählt wird, das bekannte Resultat, daß die Tangenten einer Kurve zweiter Klasse das allgemeinste rhombische Geradennetz der Ebene bilden.

Schließlich ordnen sich auch die isogonalen rhombischen Kreisnetze dem Satz I unter: Sind die Achsen der in Satz I genannten Ebenenbüschel Tangenten der Kugel mit gemeinsamem Berührpunkt, so erhält man (wie Herr Volk [13]) gezeigt hat) das allgemeinste isogonale rhombische Kreisnetz der Kugel. Auf einem etwas anderen Wege als bei Herrn Volk stellt sich nun heraus, daß diese Netze gleichzeitig die allgemeinsten isogonalen Kreisnetze überhaupt sind.

IV. Die isogonalen Kreisnetze. Wir bestimmen sie hier für die Ebene. Durch stereographische Projektion überträgt sich das Ergebnis auf die Kugel.

Die Beziehungen

$$x^2 + y^2 + U_1 x + U_2 y + U_3 = 0$$
$$x^2 + y^2 + V_1 x + V_2 y + V_3 = 0$$

stellen das allgemeinste Kreisnetz der Ebene dar. x, y sind dabei rechtwinklige ebene Punktkoordinaten, u, v unabhängige Parameter und U_1, U_2, U_3 Funktionen nur von u, V_1, V_2, V_3 Funktionen nur von v. Für die Ableitungen x_u, x_v, y_u, y_v erhält man durch Differentiation dieser Gleichungen nach u, v die Ausdrücke:

$$x_u = -(U'_1 x + U'_2 y + U'_3)(2y + V_2) \cdot D$$
$$y_u = \quad (U'_1 x + U'_2 y + U'_3)(2x + V_1) \cdot D$$
$$x_v = \quad (V'_1 x + V'_2 y + V'_3)(2y + U_2) \cdot D$$
$$y_v = -(V'_1 x + V'_2 y + V'_3)(2x + U_1) \cdot D,$$

wobei $D = (2x + U_1)(2y + V_2) - (2x + V_1)(2y + U_2) \neq 0$ vorausgesetzt ist. Bei den folgenden Betrachtungen ist diese Bedingung erfüllt. Die Bedingung

$$x_u x_v + y_u y_v = \sqrt{x_u^2 + y_u} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2} \cdot \cos\vartheta ,$$

wobei ϑ der Koordinatenwinkel ist, ergibt dann unter Berücksichtigung der Ausgangsgleichungen leicht:

(24) $$U_1 V_1 + U_2 V_2 + UV\cos\vartheta = 2(U_3 + V_3) .$$

---

[13]) O. Volk, Über Flächen mit isogonalen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung; Mém. de la Faculté des Sciences de l'Univ. de Lithuanie, Abhandl. aus dem math. Seminar der litauischen Universität Nr. 1; 1930.

Dabei ist gesetzt:

(25) $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 4U_3}$, $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 4V_3}$.

Differentiiert man (24) wiederholt nach U und V, so ergibt sich:

(26a) $U'_1V_1 + U'_2V_2 + V\cos\vartheta = 2U'_3$,

(26b) $U_1V'_1 + U_2V'_2 + U\cos\vartheta = 2V'_3$,

(27) $U'_1V'_1 + U'_2V'_2 + \cos\vartheta = 0$,

(28a) $U''_1V'_1 + U''_2V'_2 = 0$,

(28b) $U'_1V''_1 + U'_2V''_2 = 0$.

Sind $U''_2 \neq 0$, $V'_1 \neq 0$, so folgt aus (28a):

$$U''_1 = aU''_2 \quad , \quad V'_2 = -aV'_1 \quad . \quad U'_1 = aU'_2 + b_1$$

und mit (28b):

(29) $b_1V''_1 = 0.$

1) $b_1 = 0$. (27) ergibt $\cos\vartheta = 0$.

Wir erhalten die bekannten orthogonalen Kreisnetze.

2) $V''_1 = 0$, $V'_1 = b_2$, $V_1 = b_2V + c_2$. Wegen $U''_2 \neq 0$ folgt:

(30) $V'_2 = -ab_2$, $V_2 = -ab_2V + d_2 = -aV_1 + ac_2 + d_2$. Ferner ist:

(31) $U_1 = aU_2 + b_1U + c_1$.

Aus (27) ergibt sich:

(32) $\cos\vartheta = -b_1b_2$.

Für $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ muß also außer b_1 auch $b_2 \neq 0$ sein. Durch eine Drehung des xy-Systems kann man weiterhin immer erreichen: $a = 0$, und durch Parallelverschiebung: $c_2 = d_2 = 0$. Denn führt man die neuen Koordinaten $\bar{x} = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $\bar{y} = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ ein, so ergibt sich $V_1 = \bar{V}_1\cos\alpha + \bar{V}_2\sin\alpha$, $V_2 = -\bar{V}_1\sin\alpha + \bar{V}_2\cos\alpha$ ($\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ die neuen Mittelpunktskoordinaten). Setzt man dann $\operatorname{tg}\alpha = a$, so erhält man aus (30):

$$\bar{V}_2 = \frac{c_2\operatorname{tg}\alpha + d_2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha} = \text{const.}$$

Nach (25) wird $\bar{U} = U$, $\bar{V} = V$. Analog zeigt man, daß $c_2 = d_2 = 0$ keine Einschränkung bedeutet. Es kann also von vorneherein (30) in der speziellen Form $V_2 = 0$ angenommen werden.

Mit (26a, b) folgt:

(33a) $2U_3 = e_1$

(33b) $2V_3 = c_1V_1 + e_2$

und aus (24):

(34) $e_1 + e_2 = 0$.

Mit (25) erhält man unter Berücksichtigung der Beziehung $V_1 = b_2 \cdot V$:

$$V_1^2 = b_2^2 (V_1^2 - 2c_1 U_1 - 2e_2) ,$$

also, da V_1 nicht konstant sein soll:

(35) $$b_2 = \pm 1$$

(36) $$c_1 = 0$$

(37) $$e_2 = 0$$

und aus (32):

(38) $$\cos\vartheta = \pm b_1 .$$

Es ist jetzt auch $e_1 = 0$ [(34) und (37)], also

(39) $$U_3 = V_3 = 0.$$

Eliminiert man schließlich aus (25) und (31) den Parameter U, so erhält man als Ort für die Mittelpunkte der Schar u = const. das Geradenpaar:

(40) $$U_1^2 \sin^2\vartheta - U_2^2 \cos^2\vartheta = 0 .$$

Da $V_2 = 0$ ist, erhält man aus (39) und (40) den

Satz II: Das allgemeinste isogonale Kreisnetz der Ebene wird von zwei parabolischen Büscheln gebildet, deren Kreise durch denselben Punkt gehen und deren Träger den Netzwinkel ϑ einschließen.

Durch eine einfache Rechnung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, erhält man schließlich unter Heranziehung der für U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3 gefundenen Ausdrücke in den Parametern U, V und mit Verwendung der aus den Ausgangsgleichungen folgenden Beziehung

$$y \cdot U \sin\vartheta = x(U - U\cos\vartheta)$$

die Gleichung:

$$(x_u^2 + y_u^2) : (x_v^2 + y_v^2) = V^4 \cos^2\vartheta : U^4$$ und damit den

Satz III: Jedes isogonale Kreisnetz läßt sich rhombisch anordnen.

V. Die Pseudosphäre.[14]) Seien ξ, η diejenigen pseudosphärischen Koordinaten, in bezug auf welche die allgemeine zweidimensionale Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung das Quadrat des Linienelementes:

(40) $$ds^2 = d\xi^2 + e^{\frac{2\xi}{R}} \cdot d\eta^2$$

[14]) Obwohl durch eine Beltrami-Transformation die gefundenen Ergebnisse unmittelbar auf die Pseudosphäre übertragen werden könnten, soll hier doch nochmals der direkte Weg eingeschlagen werden.

besitzt. R ist der Radius der Psendosphäre. Dann stellen bekanntlich die Gleichungen

$$x = \eta,\ y = Re^{-\frac{\xi}{R}} \tag{41}$$

eine konforme Abbildung der Halbebene $y>0$ auf die reellen und im Endlichen gelegenen Punkte der Pseudosphäre dar, wobei die Kreise der Ebene in Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf der Pseudosphäre übergehen. Sind u, v wieder Parameter, U_1, U_2, U_3 Funktionen nur von u, V_1, V_2, V_3 nur von v, so stellen die Gleichungen

$$\eta^2 + R^2 . e^{-\frac{2\xi}{R}} + U_1\eta + U_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + U_3 = 0 \tag{42}$$

$$\eta^2 + R^2 . e^{-\frac{2\xi}{R}} + V_1\eta + V_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + V_3 = 0$$

das allgemeinste Netz aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf der Pseudosphäre dar. Für $U_3 = V_3 = \text{const.}$ wollen wir auch hier sagen, daß die beiden Scharen demselben Bündel angehören, weil die mit (41) ihnen entsprechenden (ebenen) Kreisscharen demselben Kreisbündel angehören. Aus (42) folgt durch Differentiation nach u, bezw. v:

$$\eta_u(2\eta + U_1) - \xi_u e^{-\frac{\xi}{R}}(2Re^{-\frac{\xi}{R}} + U_2) = -(U'_1\eta + U'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + U'_3) \tag{43a}$$

$$\eta_u(2\eta + V_1) - \xi_u e^{-\frac{\xi}{R}}(2Re^{-\frac{\xi}{R}} + V_2) = 0$$

$$\eta_v(2\eta + U_1) - \xi_v e^{-\frac{\xi}{R}}(2Re^{-\frac{\xi}{R}} + U_2) = 0 \tag{43b}$$

$$\eta_v(2\eta + V_1) - \xi_v e^{-\frac{\xi}{R}}(2Re^{-\frac{\xi}{R}} + V_2) = -(V'_1\eta + V'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + V'_3),$$

also:

$$\eta_u = (2Re^{-\frac{\xi}{R}} + V_2)(U'_1\eta + U'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + U'_3)\cdot D \tag{44}$$

$$e^{-\frac{\xi}{R}}\cdot\xi_u = -(2\eta + V_1)(U'_1\eta + U'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + U'_3)\cdot D$$

$$\eta_v = (2Re^{-\frac{\xi}{R}} + U_2)(V'_1\eta + V'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + V'_3)\cdot D$$

$$e^{-\frac{\xi}{R}}\cdot\xi_v = -(2\eta + U_1)(V'_1\eta + V'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + V'_3)\cdot D,$$

wo D, die Determinante von (43), von Null verschieden vorausgesetzt ist. Wie aus der Form (40) des Bogenelementes ersichtlich ist, drückt sich die Bedingung dafür, daß die Kurven u = const., v = vonst. auf der Pseudosphäre ein rhombisches Netz bilden, durch die Gleichung aus:

$$\xi_u^2 + e^{\frac{2\xi}{R}} \cdot \eta_u^2 = \xi_v^2 + e^{\frac{2\xi}{R}} \cdot \eta_v^2 \quad . \tag{45}$$

Aus (44) erhält man also:

$$\frac{U'_1\eta + U'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + U'_3}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 4U_3}} = \frac{V'_1\eta + V'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} + V'_3}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 4V_3}} \quad ,$$

wobei noch die Gleichungen (42) zur Berechnung der im Nenner auftretenden Ausdrücke herangezogen sind. Durch Änderung der Anordnung der Parameterkurven kann man dafür setzen:

$$(U'_1 - V'_1)\eta + (U'_2 - V'_2)Re^{-\frac{\xi}{R}} + U'_3 - V'_3 = 0 \quad . \tag{46}$$

Weiter folgt aus (42):

$$(U_1 - V_1)\eta + (U_2 - V_2)Re^{-\frac{\xi}{R}} + U_3 - V_3 = 0 \quad . \tag{47}$$

Wenn nun die beiden Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung demselben Bündel angehören, wenn also

$$U_3 = V_3 = c$$

ist, so ergibt sich aus (46), (47) abermals die Funktionalgleichung:

$$(U'_1 - V'_1)(U_2 - V_2) - (U'_2 - V'_2)(U_1 - V_1) = 0 \quad .$$

Die Funktionen U_1, U_2 (bezw. V_1, V_2) sind also nach (19), (20) und (21) durch Beziehungen von den Formen

$$a_1U_1 + a_2U_2 + a_3 = 0 \quad , \quad \text{bezw. } b_1V_1 + b_2V_2 + b_3 = 0 \tag{48}$$

oder

$$c_{11}U_1^2 + 2c_{12}U_1U_2 + c_{22}U_2^2 + 2c_{13}U_1 + 2c_{23}U_2 + c_{33} = 0, \text{[15]} \tag{49}$$

$$\text{bezw. } c_{11}V_1^2 + 2c_{12}V_1V_2 + c_{22}V_2^2 + 2c_{13}V_1 + 2c_{23}V_2 + c_{33} = 0$$

verbunden.

Im Fall (48) existiert keine Enveloppe der beiden Scharen (42). Für (49) ergibt sie sich in folgender Weise:

---

[15]) Die Konstanten c_{ik} hängen in leicht ersichtlicher Weise mit den Konstanten a_{ik} der Gl. (21) zusammen.

Differenziert man (42) nach dem Parameter, so bekommt man

$$U'_1\eta + U'_2 Re^{-\frac{\xi}{R}} = 0$$

und durch Differentiation von (49):

$$U'_1(c_{11}U_1 + c_{12}U_2 + c_{13}) + U'_2(c_{12}U_1 + c_{22}U_2 + c_{23}) = 0 ,$$

also

(50) $$c_{11}U_1 + c_{12}U_2 + c_{13} = \lambda\eta$$

$$c_{12}U_1 + c_{22}U_2 + c_{23} = \lambda Re^{-\frac{\xi}{R}} .$$

Aus (49) folgt damit

$$c_{13}U_1 + c_{23}U_2 + c_{33} = -\lambda(U_1\eta + U_2 Re^{-\frac{\xi}{R}}) = \lambda(\eta^2 + R^2 e^{-\frac{2\xi}{R}} + c) .$$

Eliminiert man hieraus, sowie aus (50) und (42) die Größen U_1, U_2 und λ, so erhält man die gemeinsame Enveloppe der beiden Scharen (42):

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \eta \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & Re^{-\frac{\xi}{R}} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \eta^2 + R^2 e^{-\frac{2\xi}{R}} + c \\ \eta & Re^{-\frac{\xi}{R}} & \eta^2 + R^2 e^{-\frac{2\xi}{R}} + c & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Anmerkungen über spezielle Dreiecksnetze aus Kreisen.

Seien wieder

(51) $$\mathfrak{U}\mathfrak{x} = 1$$

(52) $$\mathfrak{V}\mathfrak{x} = 1$$

zwei Ebenenscharen, $\mathfrak{U}$ (U_1, U_2, U_3) ein nur von u, $\mathfrak{V}$ (V_1, V_2, V_3) ein nur von v abhängiger Vektor, u, v unabhängige Parameter.

Die Ebenenschar

(53) $$\mathfrak{W}\mathfrak{x} = 1$$

bildet mit (51), (52) ein Dreiecksnetz auf der Kugel $\mathfrak{x}^2 = 1$, wenn $\mathfrak{W}$ (W_1, W_2, W_3) entweder nur von u + v, oder nur von u — v abhängt.

Aus (51), (52), (53) folgt

$$\xi = \frac{(\mathfrak{U} - \mathfrak{W}) \times (\mathfrak{V} - \mathfrak{W})}{(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})} ,$$

also die Funktionalgleichung

(54) $$[(\mathfrak{U} - \mathfrak{W}) \times (\mathfrak{V} - \mathfrak{W})]^2 = (\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})^2 .$$

Wir behandeln wieder nur den Spezialfall $U_3 = V_3 = W_3 = c$, wo die drei Ebenenscharen demselben Bündel angehören und erhalten aus (54):

$$U_1V_2 - U_2V_1 + W_1(U_2 - V_2) - W_2(U_1 - V_1) = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung hat Herr Volk [16]) gegeben. Sie liefert hier:

Satz IV: Drei demselben Ebenenbündel angehörende Ebenenscharen schneiden die Kugel genau dann in einem Dreiecksnetz, wenn sie denselben Kegel dritter Ordnung umhüllen (der auch zerfallen kann).

Durch stereographische Projektion folgt ein Ergebnis von Herrn Volk [17]) über ebene Dreiecksnetze aus Kreisen.

§ 2. Ebene rhombische Kreisnetze ohne Umwege.

Die Parameterlinien u = const., v = const. bilden auf einer Fläche mit dem Quadrat des Bogenelementes

$$ds^2 = A^2(u,v)du^2 + 2A(u,v) \cdot C(u,v) \cos\vartheta \, dudv + C^2(u,v)dv^2$$

ein rhombisches Netz ohne Umwege, wenn gleichzeitig

$$A = C \text{ und } A_v = C_u \text{ ist, d. h.}$$
$$A = C = F' ,$$

wo F = F (u + v) Funktion nur von u + v ist. Es ist also für die Ebene:

(1) $$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2 = F'^2.$$

Seien U_1, U_2, $\overline{U_2}$ Funktionen nur von u, V_1, V_2, $\overline{V_2}$ Funktionen nur von v. Dann ist durch

(2) $$x = U_2 + \frac{1}{U_1}\cos\varphi \qquad y = \overline{U_2} + \frac{1}{U_1}\sin\varphi$$

(3) $$x = V_2 + \frac{1}{V_1}\cos\varphi \qquad y = \overline{V_2} + \frac{1}{V_1}\sin\varphi$$

---

[16]) O. Volk, Über geodätische Dreiecksnetze auf Flächen konstanten Krümmungsmaßes, Sitz.-Ber. Heidelberg 1927, Nr. 3.

[17]) O. Volk, Über spezielle Kreisnetze, Sitz.-Ber. der bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1929, 125—134.

ein allgemeines Kreisnetz gegeben. Aus (1), (2), (3) folgt:

$$\frac{\psi_u}{V_1} = \frac{\varphi_v}{U_1} = F' \tag{4}$$

$$\varphi = U_1 F + \overline{U} \tag{5}$$

$$\psi = V_1 F + \overline{V} \tag{6}$$

wo U Funktion nur von u, $\overline{V}$ Funktion nur von v ist.
Durch Differentiation nach u, v folgt aus (2), (3) mit Berücksichtigung von (4):

$$x_u = -\frac{1}{V_1}\sin\psi\psi_u = -F'\sin\psi\,; \quad x_v = -\frac{1}{U_1}\sin\varphi\varphi_v = -F'\sin\varphi$$

$$y_u = \frac{1}{V_1}\cos\psi\psi_u = F'\cos\psi \quad ; \quad y_v = \frac{1}{U_1}\cos\varphi\varphi_v = F'\cos\varphi$$

und aus den Integrabilitätsbedingungen

$$x_{uv} = x_{vu} \text{ bezw. } y_{uv} = y_{vu}$$

erhält man

$$F''\sin\psi + F'\cos\psi\psi_v = F''\sin\varphi + F'\cos\varphi\varphi_u \tag{7}$$

$$F''\cos\psi - F'\sin\psi\psi_v = F''\cos\varphi - F'\sin\varphi\varphi_u\,. \tag{8}$$

Multipliziert man einmal die erste mit $\sin\psi$ und die zweite mit $\cos\psi$, das andere Mal die erste mit $\sin\varphi$ und die zweite mit $\cos\varphi$ und addiert jeweils, so kommt:

$$F'' + F'\varphi_u \operatorname{cotg}\frac{\varphi-\psi}{2} = 0 \tag{9}$$

$$F'' - F'\psi_v \operatorname{cotg}\frac{\varphi-\psi}{2} = 0\,, \text{ also} \tag{10}$$

$$\varphi_u + \psi_v = 0 \tag{11}$$

Aus (4), (9), (10) und den Integrabilitätsbedingungen $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, $\psi_{uv} = \psi_{vu}$ erhält man:

$$U'_1F' + U_1F''\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}\right) + \left(\frac{F''}{F'}\right)'\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} - \left(\frac{F''}{F'}\right)^2 \frac{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)} = 0\,,$$

$$V'_1F' + V_1F''\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}\right) + \left(\frac{F''}{F'}\right)'\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} - \left(\frac{F''}{F'}\right)^2 \frac{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)} = 0\,,$$

also

$$F'(U'_1 + V'_1) + F''(U_1 + V_1)\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}\right) = 0\,. \tag{12}$$

Zur späteren Verwendung eliminieren wir noch aus (9) und (12) die trigonometrischen Funktionen:

(13) $$F''(U'_1+V'_1)+F'(U_1+V_1)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2+\varphi^2{}_u\right]=0.$$

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich jetzt aus (5), (6) und (11) die Funktionalgleichung, die im Folgenden zugrundegelegt ist:

(14) $$U_1F'+U'_1F+\overline{U}'+V_1F'+V'_1F+\overline{V}'=0.$$

Sie ist im wesentlichen bekannt.[1]) Differenziert man nach u und nach v und setzt

(15) $$\frac{F''}{F'}=G\ ,$$

so erhält man

(16) $$U''_1+V''_1+2G(U'_1+V'_1)+(G'+G^2)(U_1+V_1)=0.$$

Wir führen als Voraussetzungen ein:

(𝔄) $$U_1+V_1\neq 0\ ;\ G'\neq 0.$$

Nochmalige Differentiation nach u und v ergibt:

(17) $$U''_1+V''_1+\frac{3G''+2GG'}{2G'}(U'_1+V'_1)+\frac{G'''+2GG''+2G'^2}{2G'}(U_1+V_1)=0.$$

Das liefert mit (16):

(18) $$(3G''-2GG')(U'_1+V'_1)+(G'''+2GG''-2G^2G')(U_1+V_1)=0.$$

Man erhält so die folgenden Fälle:

I. Sind $3G''-2GG'\neq 0$ und $G'''+2GG''-2G^2G'\neq 0$, so folgt

$$U'_1+V'_1=H\cdot(U_1+V_1)\ ,$$

wo H Funktion nur von u + v ist. Mit (12) erhält man:

$$\varphi-\psi=K(u+v)$$
$$\varphi_u-\psi_u=\varphi_v-\psi_v\ ,$$

aus (11) $\varphi_v+\psi_u=0$ und mit (4)

$$F'(U_1+V_1)=0.$$

Das ist ein Widerspruch gegen (𝔄).

II. $3G''-2GG'=0$, aber $G'''+2GG''-2G^2G'\neq 0$ scheidet wegen (18) ebenfalls aus.

III. Ist $G'''+2GG''-2G^2G'=0$, aber $3G''-2GG'\neq 0$, also $U'_1+V'_1=0$, so gibt (12) abermals einen Widerspruch gegen (𝔄).

---

[1]) O. Volk, Über Flächengruppen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, 1934, 17. Abh.

IV. $3G'' - 2GG' = 0$ und $G''' + 2GG'' - 2G^2G' = 0$,

d. h. $G' = \frac{1}{3}G^2$

$$G = -\frac{3}{u+v} .$$

Die dabei auftretende Integrationskonstante ist gleich Null gesetzt, da dies durch eine geeignete Abänderung des Anfangspunktes der Parameterzählung immer erreicht werden kann.

Setzt man

$$\frac{U_1' + V_1'}{U_1 + V_1} = g ,$$

betrachtet $g = g(u + v, u - v)$ als Funktion der beiden „Diagonalparameter" $u = u + v$, $v = u - v$ und deutet die Differentiation nach u durch einen Strich an, so ist (16) eine Riccatische Differentialgleichung:

(20) $$2g' + g^2 - \frac{6}{u+v}g + \frac{12}{(u+v)^2} = 0 .$$

Ihr allgemeines Integral ist:

(21) $$g = \frac{2}{u+v} + \frac{4(u+v)}{(u+v)^2 + h}$$

Durch Integration ergibt sich daraus:

(22) $U_1 + V_1 = k(u+v)^2[(u+v)^4 + 2h(u+v)^2 + h^2]$, wobei h und k Funktionen nur von u—v bedeuten. Differenziert man nach u und dann nach v, so erhält man:

$$(k' + kk'')(u+v)^6 + (2kk'' \cdot h + 2k'^2 \cdot h + 4kk' \cdot h' + k^2h'' - 15k^2)(u+v)^4$$
$$+ [(h'k + k'h)^2 + kh(k''h + kh'' + 2h'k') - 12h^2k^2](u+v)^2 - k^2h^2 = 0.$$

Hier müssen die Koëffizienten der verschiedenen Potenzen von $u + v$ wegen der Unabhängigkeit der Parameter $u = u + v$ und $v = u - v$ einzeln verschwinden. Es ist also speziell entweder $k = 0$, was mit (22) einen Widerspruch gegen (𝔅) ergibt, oder $h = 0$, woraus mit (21) folgt, daß der hier vorliegende Fall sich I unterordnet.

Es bleiben noch die mit (𝔅) ausgeschlossenen Fälle zu behandeln.

V. $G' = 0$, $U_1 + V_1 \neq 0$.

Sei $G = \frac{F''}{F'} = c \neq 0$, so folgt :

$$F = \frac{c_1}{c} \cdot e^{c(u+v)} + c_2 \ (c_1, c_2 \text{ Konstanten}).$$

Es muß $c_1 \neq 0$ sein. Aus (16), (5), (6) mit Berücksichtigung von (14) ergeben sich für U_1, V_1, φ, ψ die Ausdrücke:

(23) $$U_1 = (a_1 + b_1 u)\, e^{-cu} + \frac{C}{c^2}$$

(24) $$V_1 = (a_2 + b_2 v)\, e^{-cv} - \frac{C}{c^2}$$

$$\varphi = \frac{c_1}{c}(a_1 + b_1 u)\, e^{cv} + \frac{Cc_1}{c^3} e^{c(u+v)} - \frac{b_2 c_1}{c^2} e^{cu} - C_1 u + C_2$$

$$\psi = \frac{c_1}{c}(a_2 + b_2 v)\, e^{cu} - \frac{Cc_1}{c^3} e^{c(u+v)} - \frac{b_1 c_1}{c^2} e^{cv} + C_1 v + C_3$$

C, C_1, C_2, C_3, a_1, a_2, b_1, b_2 sind Integrationskonstanten. Sie müssen solche Werte annehmen, daß Gleichung (13) eine Identität in den unabhängigen Parametern u, v wird. Setzt man noch $U = e^{cu}$, $V = e^{cv}$ und multipliziert mit UV, so lautet (13):

$$\left(a_1 + \frac{b_1}{c}\log U\right)\left\{\left(\frac{b_1 c_1}{c}\right)^2 \cdot V^3 + \left(\frac{c_1 b_2}{c}\right)^2 \cdot U^2 V + 2\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \frac{b_1 C}{c} UV^3 + \left(\frac{Cc_1}{c^2}\right)^2 \cdot U^2 V^3 - 2b_1 b_2 \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \cdot UV^2 - \frac{2Cb_2}{c}\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 U^2 V^2 - \frac{2b_1 c_1 C_1}{c} V^2 - \frac{2c_1 C_1 C}{c^2} UV^2 + \left(C_1^2 + \frac{c^2}{2}\right) V + \frac{2C_1 c_1 b_2}{c} UV\right\} + \left(a_2 + \frac{b_2}{c}\log V\right)\left\{\left(\frac{c_1 b_1}{c}\right)^2 \cdot UV^2 + \left(\frac{c_1 b_2}{c}\right)^2 \cdot U^3 + 2\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \frac{b_1 C}{c} \cdot U^2 V^2 + \left(\frac{Cc_1}{c^2}\right)^2 \cdot U^3 V^2 - 2b_1 b_2 \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \cdot U^2 V - \frac{2Cb_2}{c}\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \cdot U^3 V - \frac{2b_1 c_1 C}{c_2} U^2 V + \left(C_1^2 + \frac{c^2}{2}\right) U + \frac{2C_1 c_1 b_2}{c} U^2\right\} + b_1 cV + b_2 cU = 0.$$

Es seien nur die für das Ergebnis wesentlichen hieraus folgenden Bestimmungsgleichungen für die Konstanten angeschrieben:

$$b_2 c + a_2\left(C_1^2 + \frac{c^2}{2}\right) = 0\,; \qquad b_2 c_1^2 = 0$$

$$b_1 c + a_1\left(C_1^2 + \frac{c^2}{2}\right) = 0\,; \qquad b_1 c_1^2 = 0$$

Es ist also: $b_1 = b_2 = 0$ und, weil alle Konstanten reell vorausgesetzt sind: $a_1 = a_2 = 0$.
(23), (24) liefern damit einen Widerspruch gegen die Voraussetzung $U_1 + V_1 \neq 0$.

VI. $$G = \frac{F''}{F'} = 0\,; \quad U_1 + V_1 \neq 0\,.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $F' = 1$ setzen und erhält, nach einer von A. Voss. eingeführten Bezeichnung, die „äquidistanten“ Netze, für welche:

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2 = 1 \text{ ist.}$$

Es ist nach (9) und (10) $\varphi_u = \varphi_v = 0$ und nach (4):

$$\varphi_v = U_1 \; ; \quad \psi_u = V_1 \; .$$

Die Integrabilitätsbedingungen liefern: $U'_1 = V'_1 = 0$; $U_1 = c_1$; $V_1 = c_2$; und schließlich:

$$\varphi = c_1 v \; ; \quad \psi = c_2 u \; ,$$

wobei noch unwesentliche additive Konstanten weggelassen sind. Aus den Ausgangsgleichungen (2), (3) ergeben sich die Koordinaten der Mittelpunkte der beiden Kreisscharen und schließlich die Darstellung des Netzes:

$$x = \frac{1}{c_2}\cos(c_2 u) + \frac{1}{c_1}\cos(c_1 v)$$

$$y = \frac{1}{c_2}\sin(c_2 u) + \frac{1}{c_1}\sin(c_1 v) \quad .$$

Satz V: Das allgemeinste äquidistante Kreisnetz wird von den sämtlichen gemeinsamen Berührkreisen zweier konzentrischen Kreise gebildet.[2])

VII. Es bleibt schließlich die Frage nach rhombischen Netzen ohne Umwege aus Kreisen von durchwegs demselben Radius zu beantworten: $U_1 + V_1 = 0$ oder $U_1 = 1$, $V_1 = -1$. Die Gleichungen (4) und (11) werden:

(25) $$\varphi_v = -\psi_u = F'$$

(26) $$\varphi_u + \psi_v = 0 \quad .$$

aus denen man folgert:

$$\varphi = F + \bar{U}$$

$$\psi = -F + \bar{V}$$

(27) $$\bar{U}' + \bar{V}' = 0 \; ; \; \bar{U} = ku \; ; \; \bar{V} = -kv$$

(28) $$\varphi = F + ku \; ; \; \psi = -(F + kv) \qquad \text{(k konstant)}$$

Da in dem hier vorliegenden Fall ein etwas anderer Weg eingeschlagen werden soll, gehen wir auf die Ausgangsgleichungen zurück:

(29) $$U_2 - V_2 + \cos\varphi + \cos\psi = 0$$

(30) $$\bar{U}_2 - \bar{V}_2 + \sin\varphi + \sin\psi = 0 \; .$$

Durch Differentiation nach u, bezw. v erhält man daraus:

$$U'_2 = \sin\varphi\varphi_u + \sin\psi\psi_u$$

$$-V'_2 = \sin\varphi\varphi_v + \sin\psi\psi_v$$

$$\bar{U}'_2 = -\cos\varphi\varphi_u - \cos\psi\psi_u$$

$$\bar{V}'_2 = \cos\varphi\varphi_v + \cos\psi\psi_v$$

---

[2]) Am Schluß dieses Paragraphen sind daraus einige Folgerungen gezogen.

Bei geeigneter Zusammenfassung und unter Berücksichtigung von (25), (26) ergibt sich daraus:

$$U'_2\cos\varphi + \overline{U}'_2\sin\varphi + V'_2\cos\psi + \overline{V}'_2\sin\psi = 0$$
$$U'_2\cos\psi + \overline{U}'_2\sin\psi + V'_2\cos\varphi + \overline{V}'_2\sin\varphi = 0.$$

Entnimmt man $\cos\psi$, $\sin\psi$ aus (29) und (30), so lauten diese Gleichungen:

(31) $(U'_2 - V'_2)\cos\varphi + (\overline{U}'_2 - \overline{V}'_2)\sin\varphi - V'_2(U_2 - V_2) - \overline{V}'_2(\overline{U}_2 - \overline{V}_2) = 0,$

(32) $(U'_2 - V'_2)\cos\varphi + (\overline{U}'_2 - V'_2)\sin\varphi + U'_2(U_2 - V_2) + \overline{U}'_2(\overline{U}_2 - \overline{V}_2) = 0,$

also ist $(U'_2 + V'_2)(U_2 - V_2) + (\overline{U}'_2 + \overline{V}'_2)(\overline{U}_2 - \overline{V}_2) = 0.$ In

$$2M = (U_2 - V_2)^2 + (\overline{U}_2 - \overline{V}_2)^2$$

bedeutet folglich $M = M(u + v)$ eine Funktion nur von $u + v$. Damit erhält man aus (29), (30) durch Quadrieren und Addieren, wenn man $\cos\psi$, $\sin\psi$ auf die rechte Seite setzt:

(33) $(U_2 - V_2)\cos\varphi + (\overline{U}_2 - \overline{V}_2)\sin\varphi + M = 0\ .$

Dazu kommt eine der Gl. (31), (32) (die jetzt identisch sind) in der Form:

(34) $(U'_2 - V'_2)\cos\varphi + (\overline{U}'_2 - \overline{V}'_2)\sin\varphi + M' = 0\ .$

Setzt man:

$$U'_2 + V'_2 = K(\overline{U}_2 - \overline{V}_2)$$
$$\overline{U}'_2 + \overline{V}'_2 = -K(U_2 - V_2),$$

so folgt aus (34):

(35) $(K + \varphi_u - \varphi_v)[(\overline{U}_2 - \overline{V}_2)\cos\varphi - (U_2 - V_2)\sin\varphi] = 0\ .$

a) Ist $(\overline{U}_2 - \overline{V}_2)\cos\varphi - (U_2 - V_2)\sin\varphi = 0$, so ist nach (33), weil

$$(U_2 - V_2)^2 + (\overline{U}_2 - V_2)^2 \neq 0,$$

(36) $$2M = (U_2 - V_2)^2 + (\overline{U}_2 - \overline{V}_2)^2 = 4.$$

Daraus folgt: $U'_2 = a\overline{U}'_2$, $V'_2 = -\frac{1}{a}\overline{V}'_2$; $U_2 = a\overline{U}_2$, $V_2 = -\frac{1}{a}\overline{V}_2$ (für $a \neq 0$),

oder, mit (36): $U_2 = a\overline{U}_2 = \text{const}$ und $V_2 = -\frac{1}{a}\overline{V}_2 = \text{const}$.

Für $a = 0$, d. h. $U'_2 = \overline{V}'_2 = 0$ ist der Schluß analog. Da die Radien der Kreise durchwegs dieselben sind, liegt hier kein Netz vor.

Ist in (35):

b) $K + \varphi_u - \varphi_v = 0$; so erhält man aus (27), (28):

(37) $$K = -k.$$

Das gibt:

(38) $U'_2 = -k\overline{U}_2 + m \qquad \overline{U}'_2 = kU_2 + n$

$V'_2 = k\overline{V}_2 - m \qquad \overline{V}'_2 = -kV_2 - n$.

Hier darf man, für $k \neq 0$, $m = n = 0$ setzen, und bekommt:

$U''_2 + k^2U_2 = 0 \qquad \overline{U}''_2 + k^2\overline{U}_2 = 0$

$V''_2 + k^2V_2 = 0 \qquad \overline{V}''_2 + k^2\overline{V}_2 = 0$,

andererseits aber auch:

$U_2^2 + \overline{U}_2^2 = C_1^2$, $V_2^2 + \overline{V}_2^2 = C_2^2$, d. h.

(39) $U_2 = C_1\sin(ku) \qquad \overline{U}_2 = -C_1\cos(ku)$

$V_2 = C_2\sin(kv) \qquad \overline{V}_2 = C_2\cos(kv)$.

Damit und mit (33), (34) folgt, wenn $C_1^2 - C_2^2 \neq 0$ ist:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[C_2\sin(kv) - C_1\sin(ku)\right],$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2}\left[C_1\cos(ku) + C_2\cos(kv)\right], \text{ also:}$$

$$C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos k(u+v) = 4.$$

$C_1 = 0$ oder $C_2 = 0$ ist aber nach (39) nicht möglich. Es bleibt also nur $C_1^2 = C_2^2 = C^2$. Es verschwinden dann alle zweireihigen Unterdeterminanten von (33), (34), wie man sich mit Hilfe des Wertes für M:

$$M = C^2\,(1 + \cos k\,(u + v))$$

leicht überzeugt.

Für $C_1 = C_2 = C$ erhält man aber sofort einen Widerspruch, wenn man die entsprechenden Werte für U_2, $\overline{U}_2$, V_2, $\overline{V}_2$ in (29) und (30) einsetzt.

Es sei also: $C_1 = -C_2 = C$. Dann sind

$U_2 = C\sin(ku) \qquad \overline{U}_2 = -C\cos(ku)$

$V_2 = C\sin(kv) \qquad \overline{V}_2 = C\cos(kv)$,

und man bekommt, wenn man in (29), (30) $\cos\psi$ und $\sin\psi$ auf die rechte Seite bringt, quadriert und addiert:

$$\cos\left(\varphi - \frac{k(u-v)}{2}\right) = -C\sin\frac{k(u+v)}{2}, \text{ und analog}$$

$$\cos\left(\psi - \frac{k(u-v)}{2}\right) = -C\sin\frac{k(u+v)}{2}.$$

Mit (29) ergibt sich aus diesen beiden Beziehungen zur Bestimmung von F:

$$\cos\left(F+\frac{k(u+v)}{2}\right)+C\sin\frac{k(u+v)}{2}=0\ .$$

Das Netz entsteht durch Rotation eines Kreises um einen nicht mit seinem Mittelpunkt zusammenfallenden Punkt.

Sei schließlich in (37) $k=0$. Es folgt aus (28) $\varphi+\psi=0$, also mit (29), (30); $U_2-V_2+2\cos\varphi=0$ und $\overline{U_2}=\overline{V_2}=c$, und aus (38):

$$U_2=mu\ ,\quad V_2=-mv\ ,$$
$$\cos\varphi=-\frac{m}{2}(u+v)\ .$$

Das Netz entsteht durch Parallelverschiebung eines Kreises.

Satz VI: Die äquidistanten Kreisnetze, sowie die durch Rotation oder Parallelverschiebung eines Kreises entstehenden Netze sind die einzigen rhombischen Kreisnetze ohne Umwege.

Anhang: Projektion der äquidistanten Kreisnetze auf die Kugel.

Seien ξ, η rechtwinklige Punktkoordinaten der Ebene, x, y, z ebensolche im Raum. Das allgemeinste äquidistante Kreisnetz der Ebene ist nach Satz V gegeben durch (Bezeichnungen etwas geändert!):

$$(40)\qquad \left(\xi-a\cdot\cos\frac{u}{a}\right)^2+\left(\eta-a\cdot\sin\frac{u}{a}\right)^2=b^2$$
$$\left(\xi-b\cdot\cos\frac{v}{b}\right)^2+\left(\eta-b\cdot\sin\frac{v}{b}\right)^2=a^2\ .$$

Die gemeinsame Enveloppe dieser beiden Scharen wird von zwei konzentrischen Kreisen gebildet. Durch stereographische Projektion auf eine geeignete Ebene kann man aber immer zwei beliebige sich nicht reell schneidende Kreise der Kugel in zwei konzentrische Kreise der Ebene überführen. Man braucht nur die zur Schnittgeraden der beiden Kreisebenen konjugierte Polare mit der Kugel zu schneiden und einen ihrer Schnittpunkte als Zentrum der stereographischen Projektion zu wählen. Die rhombische Eigenschaft bleibt bei dieser Abbildung jedenfalls erhalten.

Aus den Abbildungsformeln:

$$\xi=\frac{x}{1-z}\ ,\ \eta=\frac{y}{1-z}\ ,\ x^2+y^2+z^2=1$$

erhält man nach (40), wenn man noch ξ durch $\xi+k$, η durch $\eta+l$ ersetzt:

$$x\left(a\cos\frac{u}{a}+k\right)+y\left(a\sin\frac{u}{a}+l\right)+z\left[a\left(k\cos\frac{u}{a}+l\sin\frac{u}{a}\right)+\frac{a^2-b^2+k^2+l^2-1}{2}\right]$$
$$=a\left(k\cos\frac{u}{a}+l\sin\frac{u}{a}\right)+\frac{a^2-b^2+k^2+l^2+1}{2}\;;$$

$$x\left(b\cos\frac{v}{b}+k\right)+y\left(b\sin\frac{v}{b}+l\right)+z\left[b\left(k\cos\frac{v}{b}+l\sin\frac{v}{b}\right)+\frac{b^2-a^2+k^2+l^2-1}{2}\right]$$
$$=b\left(k\cos\frac{v}{b}+l\sin\frac{v}{b}\right)+\frac{b^2-a^2+k^2+l^2+1}{2}\;.$$

Sie sind von der Form:

$$U_1x+U_2y+U_3z=1\;,$$
$$V_1x+V_2y+V_3z=1\;;$$

eliminiert man aus den U_1, U_2, U_3 bezw. V_1, V_2, V_3 die $\cos\frac{u}{a},\sin\frac{u}{a}$ bezw. $\cos\frac{v}{b},\sin\frac{v}{b}$, so ergeben sich die Kurven $\mathfrak{U}(U_1, U_2, U_3)$ und $\mathfrak{V}(V_1, V_2, V_3)$ als Schnitte der Flächenpaare:

$$\begin{cases} kU_1+lU_2+\dfrac{p^2-1}{2}U_3=\dfrac{p^2+1}{2} \\ U_1^2+U_2^2+(k^2+l^2-a^2)(1-U_3)^2-2(kU_1+lU_2)(1-U_3)=0\;, \text{ bezw.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} kV_1+lV_2+\dfrac{q^2-1}{2}V_3=\dfrac{q^2+1}{2} \\ V_1^2+V_2^2+(k^2+l^2-b^2)(1-V_3)^2-2(kV_1+lV_2)(1-V_3)=0\;. \end{cases}$$

Dabei sind zur Abkürzung gesetzt:

$$p^2=b^2-a^2+k^2+l^2\quad,\quad q^2=a^2-b^2+k^2+l^2.$$

Die Kurven $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ sind also zwei verschiedene Kegelschnitte und liegen, als Schnittgebilde zweier Kegel, auf ein und derselben abwickelbaren Fläche, welche die Kugel längs der gemeinsamen Enveloppe der beiden Kreisscharen berührt.

Wie eine einfache geometrische Deutung der Gl. (15) aus § 1 zeigt, gilt die Aussage, daß die Kurven $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ auf ein und derselben abwickelbaren Fläche liegen, welche die Kugel längs einer auf ihr gezogenen Kurve $\mathfrak{C}$ berührt, für jedes rhombische Kreisnetz der Kugel. Die einzige Ausnahme ist der in § 1 näher ausgeführte Spezialfall, bei welchem $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ in derselben Ebene liegen, die die Kugel nicht berührt.

§ 3. Flächen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung, deren Diagonalkurven gegebene Eigenschaften haben.

Wir gehen aus von dem Quadrat des Bogenelementes:

(1) $$ds^2 = A^2(du^2 + 2dudv \cdot \cos\vartheta + dv^2) ,$$

wo $A = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ ist und ϑ den Koordinatenwinkel bedeutet. Die Bedingungen dafür, daß die Parameterkurven die konstante geodätische Krümmung $-U_1$ (u), bezw. $-V_1$ (v) besitzen, sind:

(2) $$U_1 A^2 \sin\vartheta = A_u - A_v \cos\vartheta + A \sin\vartheta\,\vartheta_v$$
$$V_1 A^2 \sin\vartheta = A_v - A_u \cos\vartheta + A \sin\vartheta\,\vartheta_u .$$

Wir setzen sie in die Form:

(3) $$A_u + A\,\frac{\vartheta_v + \cos\vartheta\,\vartheta_u}{\sin\vartheta} = A^2 \frac{U_1 + V_1 \cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$
$$A_v + A\,\frac{\vartheta_u + \cos\vartheta\,\vartheta_v}{\sin\vartheta} = A^2 \frac{V_1 + U_1 \cos\vartheta}{\sin\vartheta} .$$

Die Integrabilitätsbedingung $A_{uv} = A_{vu}$ ergibt, wenn man noch die ersten Ableitungen A_u, A_v nach (3) durch ihre Ausdrücke in A ersetzt, die Bestimmungsgleichung für A:

$$\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\vartheta_v + \cos\vartheta\,\vartheta_v}{\sin\vartheta}\right) - \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\vartheta_u + \cos\vartheta\,\vartheta_v}{\sin\vartheta}\right)$$
$$- A\left[\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{U_1 + V_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right) - \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{V_1 + U_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right) + \frac{V_1 + U_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,\frac{\vartheta_v + \cos\vartheta\,\vartheta_u}{\sin\vartheta}\right.$$
$$\left. - \frac{U_1 + V_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\vartheta_u + \cos\vartheta\,\vartheta_v}{\sin\vartheta}\right]$$

oder:

(4) $$\frac{1}{A}\left[\frac{\delta^2}{\delta v^2}\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{\delta^2}{\delta u^2}\log\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right] - \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{U_1 + V_1\cos\vartheta}{\sin\delta}\right) - \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{V_1 + U_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)$$
$$+ V_1\,\vartheta_v - U_1\,\vartheta_u .$$

Zu den beiden Bedingungen (2) soll nun noch die weitere hinzugenommen werden, daß eine Schar der Diagonalkurven des Netzes, etwa $u - v = \text{const.}$, aus Geodätischen besteht. Das ergibt:

(5) $$\frac{A_u - A_v}{A} = \frac{\vartheta_u - \vartheta_v}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} .$$

Bei Einführung der Diagonalkurven $\bar{u} = u + v$, $\bar{v} = u - v$ als Parameterlinien geht (5) über in:

(5′) $$\frac{A\bar{v}}{A} = \frac{\vartheta\bar{v}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

mit der allgemeinen Lösung:

(6) $$A = -\frac{\varphi}{\cos\frac{\vartheta}{2}},$$

wo $\varphi = \varphi\ (u + v)$ eine Funktion nur von $\bar{u} = u + v$ ist. Die Gleichungen (3) nehmen die Form an:

(7) $$\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\left\{\log\left(A\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}A(U_1 + V_1)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{v}}\left\{\log\left(A\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}A(U_1 - V_1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2},$$

deren zweite mit Hilfe von (6) übergeht in:

(8) $$\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\vartheta\bar{v} = \varphi(U_1 - V_1)$$

mit dem Integral:

(9) $$\sin\frac{\vartheta}{2} = \varphi(U + V) + \psi\ .$$

Dabei ist $dU = U_1 du$, $dV = V_1 dv$ und ψ eine weitere Funktion nur von $u + v$. Die erste der Gl. (7) nimmt mit (6) die Form an:

$$\frac{\vartheta_{\bar{u}}}{2\cos\frac{\vartheta}{2}} + \frac{\delta}{\delta\bar{v}}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{\varphi'}{\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2} + \frac{\varphi}{2}(U' + V') = 0,$$

und daraus ergibt sich mit (9) die Funktionalgleichung:

$$\frac{\varphi'(U+V) + \frac{\varphi}{2}(U'+V') + \psi'}{1 - [\varphi(U+V) + \psi]^2} + \frac{\varphi'}{\varphi}[\varphi(U+V) + \psi] + \frac{\varphi}{2}(U'+V') + \varphi'(U+V) + \psi' = 0.$$

Es soll als Beispiel nur der spezielle Fall betrachtet werden, daß in (9):

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = g(u - v)$$

eine Funktion nur von $u - v$ ist. Die Funktionalgleichung gibt dann:

(10a) $$\frac{\varphi'}{\varphi}\cdot g + \frac{\varphi}{2}(U' + V') = 0\ ,$$

Andererseits folgt aus (9):

(10b) $$\varphi(U + V) + \psi = g.$$

Für $\varphi' \neq 0$, $U' + V' \neq 0$ und $U''^2 - V''^2 \neq 0$ erhält man durch Differentation nach u aus (10a):

(11a) $$\left(\frac{\varphi^2}{\varphi'}\right)'(U'+V')+\frac{\varphi^2}{2\varphi'}(U''+V'')=0$$

und aus (10b) durch Differentiation erst nach $\bar{u}$, dann nach $\bar{v}$:

(11b) $$\varphi'(U'-V')+\frac{\varphi}{2}(U''-V'')=0\ ,$$

also sowohl:

(12a) $$\frac{\delta}{\delta_{\bar{v}}}\left(\frac{U''+V''}{U'+V'}\right)=0\ ,\ \text{wie auch:}$$

(12b) $$\frac{\delta}{\delta_{\bar{v}}}\left(\frac{U''-V''}{U'-V'}\right)=0\ .$$

Beide Beziehungen zusammen ergeben:

(13) $$\frac{U'''}{U'}=\frac{V'''}{V'}=c\ ;\quad U''=cU+a\ ,\ V''=cV+b\ ,$$

wo a, b, c willkürliche Konstanten sind. Mit (12) erhält man

$$cU'^2-(cU+a)^2=cV'^2-(cV+b)^2=k\qquad(k\neq 0)\ .$$

Das liefert:

(15)
$$U=\frac{\sqrt{k}}{2c}\left(e^{\sqrt{c}u}-e^{-\sqrt{c}u}\right)-\frac{a}{c}$$
$$V-\frac{\sqrt{k}}{2c}\left(e^{\sqrt{c}v}-e^{-\sqrt{c}v}\right)-\frac{b}{c}$$
$$U_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{c}}\left(e^{\sqrt{c}u}+e^{-\sqrt{c}u}\right)$$
$$V_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{c}}\left(e^{\sqrt{c}v}+e^{-\sqrt{c}v}\right)$$

und weiter (11b):

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=-\frac{\sqrt{c}}{2}\frac{e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}+e^{-\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}}{e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}-e^{-\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}}\ ,\ \text{oder}$$

(16) $$\varphi=\frac{m}{e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}-e^{-\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}}\ .$$

Weiter ergibt sich aus (11a):

$$\frac{4\varphi'}{\varphi}-\frac{2\varphi''}{\varphi'}=-\sqrt{c}\frac{e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}-e^{-\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}}{e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}+e^{-\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}}\ ,\ \text{also}$$

$$\frac{\varphi^2}{\varphi'} = \frac{n}{e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}} + e^{-\sqrt{c}\frac{u+v}{2}}},$$

was mit (16) übereinstimmt. Mit Hilfe der aus (10b) folgenden Beziehung:

$$\psi' = -\varphi'(U+V) - \frac{\varphi}{2}(U'+V')$$

findet sich nach kurzer Rechnung:

$$\psi = \frac{(a+b)m}{c\left(e^{\sqrt{c}\frac{u+v}{2}} - e^{-\sqrt{c}\frac{u-v}{2}}\right)}$$

und schließlich aus (10b):

$$g = \frac{m\sqrt{k}}{2c}\left(e^{\sqrt{c}\frac{u-v}{2}} + e^{-\sqrt{c}\frac{u-v}{2}}\right).$$

Derselbe Ausdruck folgt aus (10a).

Das Bogenelement der zugehörigen Flächen soll unmittelbar auf die Diagonalkurven u = const., v = const. bezogen werden:

$$ds^2 = \varphi^2\left(d\bar{u}^2 + tg^2\frac{\vartheta}{2}d\bar{v}^2\right).$$

Es ergeben sich mithin Rotationsflächen, und wenn man noch einführt:

$$d\bar{U} = \varphi \cdot d\bar{u} \quad ; \quad d\bar{V} = tg\frac{\vartheta}{2} \cdot d\bar{v},$$

so erhält man die Form:

$$ds^2 = d\bar{U}^2 + \frac{m^2}{16}\left(e^{+\frac{\sqrt{c}}{2m}\bar{U}} - e^{-\frac{\sqrt{c}}{2m}\bar{U}}\right)^2 \cdot d\bar{V}^2,$$

also pseudosphärische Rotationsflächen. Die Meridiankurven bilden die eine Schar der (geodätischen) Diagonalkurven $\bar{v}$ = const.

Es soll schließlich ein weiteres Beispiel der in der Überschrift dieses § genannten Flächen behandelt werden: Die Diagonalkurven des rhombischen Netzes aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung seien die Haupttangentenkurven der Fläche. Da die Diagonalkurven eines rhombischen Netzes ein orthogonales Netz bilden, sind die gefundenen Flächen Minimalflächen.

E, F, G seien die Fundamentalgrößen 2. Ordnung der Fläche. Dann sind die Haupttangentenkurven die Diagonalkurven, wenn

(17) $$E+G=0,\ F=0$$

ist. Schließlich sind mit (2) die Dreiindizessymbole zu berechnen:

(18)
$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}=V_1A\operatorname{cotg}\vartheta+\frac{Au}{A}\ ;\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}=-\frac{V_1A}{\sin\vartheta}$$
$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=\frac{V_1A-\vartheta u}{\sin\vartheta}\ ;\ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=-\frac{U_1A-\vartheta v}{\sin\vartheta}$$
$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}=-\frac{U_1A}{\sin\vartheta}\ ;\ \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}=U_1A\operatorname{cotg}\vartheta+\frac{Av}{A}\ .$$

Die Mainardi-Codazzischen Gleichungen lauten:

(19)
$$\frac{\delta\log E}{\delta v}+\frac{\vartheta u}{\sin\vartheta}=0$$
$$\frac{\delta\log E}{\delta u}+\frac{\vartheta v}{\sin\vartheta}=0\ ,$$

woraus man sofort erhält.

(20) $$\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}=\frac{f}{g}$$

(21) $$E=\frac{1}{\sqrt{fg}}\ .$$

Dabei ist f Funktion nur von u + v, g nur von u — v. Führt man diesen Ausdruck für E, sowie die aus (3) folgenden Werte für A_u, A_v in den Liouville'schen Ausdruck für das Krümmungsmaß

$$\frac{EG-F^2}{A^2\sin\vartheta}=\vartheta_{uv}-\frac{\delta}{\delta u}(U_1A)-\frac{\delta}{\delta v}(V_1A)$$

ein, so erhält man nach kurzer Rechnung, wenn man nach Potenzen von A ordnet:

(22) $$p\cdot A^4+q\cdot A^3+r\cdot A^2+s\cdot A+t=0$$

und die Koëffizienten haben folgende Bedeutung:

(23)
$$p=\frac{(U_1^2+V_1^2)(f+g)-2U_1V_1(f-g)}{2\sqrt{fg}}$$
$$q=U'_1+V'_1-\frac{f'g^2}{f(f+g)}(U_1+V_1)-\frac{g'f^2}{f(f+g)}(U_1-V_1)$$
$$r=-\frac{g\sqrt{fg}}{2}\left(\frac{f'^2}{f^2}-\frac{g'^2}{g^2}\right)-\sqrt{\frac{g}{f}}\frac{fg(f''+g'')-f'g'(f+g)+f''g^2+g''f^2-f'g^2-g'^2f}{(f+g)^2}$$

$$s = 0$$

$$t = \frac{f+g}{2fg\sqrt{fg}} .$$

Schließlich ist noch:

(24) $$\cos\vartheta = \frac{f-g}{f+g} ;$$

Während im ersten Teil dieses Paragraphen die Flächen nur bis auf Verbiegungen bestimmt waren, sind die hier betrachteten Flächen durch ihre Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung bis auf kongruente Abbildungen festgelegt, sobald die Funktionen U_1, V_1, f, g ermittelt sind. zu ihrer Bestimmung erhält man aber aus (4) und (20) die Funktionsabgleichung:

(25) $$(U_1' - V_1')(f+g) + U_1(f'+g') - V_1(f'-g') = 0 .$$

Das ist genau die Funktionalgleichung, auf die Herr Volk [3]) bei der Behandlung derjenigen Flächen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung gekommen ist, für die zu jedem Wert des Koordinatenwinkels ϑ noch ∞^1 Bogenelemente gehören. Ihre Lösung soll — mit unwesentlichen Änderungen — kurz wiedergegeben werden. Zunächst läßt sich (25) so schreiben:

$$\frac{\delta}{\delta u}[U_1(f+g)] = \frac{\delta}{\delta v}[V_1(f+g)] .$$

Man erhält also:

$$U_1(f+g) = \psi v , \quad V_1(f+g) = \psi u$$

und mit Verwendung der Bezeichnungen:

(26) $$dU = \frac{du}{U_1} , \quad dV = \frac{dv}{V_1}$$

(27) $$\psi = \psi(U+V) .$$

Daraus folgt

(28) $$f+g = U'V'\psi' ,$$

wo die Striche Differentiationen nach u, v, bezw. U + V bedeuten. Es ist also:

$$\frac{\delta^2}{\delta u^2}(U'V'\psi') = \frac{\delta^2}{\delta v^2}(U'V'\psi') \quad \text{oder:}$$

(29) $$\left(\frac{U'''}{U'} - \frac{V'''}{V'}\right)\psi' + 3\psi''(U''-V'') + U'^2 - V'^2 = 0 .$$

---

[3]) O. Volk, Über Flächengruppen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, 1934, 17. Abh.

Setzt man:

$$U'^2 = \bar{U}\ ,\quad V'^2 = \bar{V}\ ,\quad \frac{\psi''}{\psi'} = H \tag{30}$$

und bedeuten von jetzt an die Striche bei $\bar{U}$, $\bar{V}$ Differentiationen nach U, bezw. V, wobei also:

$$\bar{U}' = 2U''\ ,\quad \bar{V}' = 2V''\ ,\quad \bar{U}'' = 2\frac{U'''}{U'}\ ,\quad \bar{V}'' = 2\frac{V'''}{V'}\ , \tag{30}$$

so geht (29) über in:

$$\bar{U}'' - \bar{V}'' + 3H(\bar{U}' - \bar{V}') + 2(H' + H^2)(\bar{U} - \bar{V}) = 0\ . \tag{31}$$

Diese Funktionalgleichung ist (bis auf Zahlenfaktoren) die gleiche wie in § 2. Für $H' \neq 0$ folgt:

$$\bar{U}'' - \bar{V}'' + \frac{5H'' + 4HH'}{3H'}(\bar{U}' - \bar{V}') + \frac{2(H''' + 2HH'' + 2H'^2)}{3H'}(\bar{U} - \bar{V}) = 0\ ,$$

woraus man für $H'' - HH' \neq 0$ mit (31) bekommt:

$$\frac{\delta}{\delta U}\left(\frac{\bar{U}' - \bar{V}'}{\bar{U} - \bar{V}}\right) = \frac{\delta}{\delta V}\left(\frac{\bar{U}' - \bar{V}'}{\bar{U} - \bar{V}}\right)\ . \tag{32}$$

Durch zweimalige Differentiation nach U und V erhält man weiter:

$$\frac{\bar{U}'''}{\bar{U}'} = \frac{\bar{V}'''}{\bar{V}'} = c\ , \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= a \cdot \sin(kU) + b \\ \bar{V} &= a \cdot \sin(kU) + b \end{aligned} \qquad (k = \sqrt{-c})\ . \tag{34}$$

Aus der Riccatischen Differentialgleichung (31) folgt, da ein partikuläres Integral leicht ersichtlich ist:

$$H = k\left(\operatorname{tg}\frac{k}{2}(U+V) + \frac{\cos\frac{k}{2}(U+V)}{2\sin\frac{k}{2}(U+V) + 1}\right)\ , \tag{35}$$

sodann aus (30)

$$\psi' = \frac{C_1\left(\sin\frac{k}{2}(U+V) + 1\right)}{\cos^2\frac{k}{2}(U+V)} \tag{36}$$

$$\psi = \frac{2C_1}{k \cdot \cos\frac{k}{2}(U+V)} + C_2 \operatorname{tg}\frac{k}{2}(U+V)\ . \tag{37}$$

Aus (28) sind schließlich die Funktionen f und g zu ermitteln.

$$f' + g' = U''V'\psi' + U'^2V'\psi''$$
$$f' - g' = U'V''\psi' + U'V'^2\psi''$$

ergeben:

$$f-g=U''\psi+U'^{2}\psi'+U_2=v''\psi+V'_2\psi'+V_2 \quad \text{mit}$$
$$U_2-V_2=C_3(\sin(kU)-\sin(kV)) \qquad (C_3=-aC_1)\ .$$

Damit erhält man:

$$(38)\quad f-g=C_1\frac{a\cos\frac{k}{2}(U+V)\left[1+l\sin\frac{k}{2}(U+V)\right]+b\left[\sin\frac{k}{2}(U+V)+l\right]}{\cos^2\left[\frac{k}{2}(U+V)\right]}+d,$$

$$f+g=C_1\frac{\left[\sin\frac{k}{2}(U+V)+l\right]\sqrt{[a\sin(kU)+b]\,[a\sin(kV)+b]}}{\cos^2\left[\frac{k}{2}(U+V)\right]}$$

$$(41)\quad \cos\vartheta=\frac{f-g}{f+g}$$
$$=-\frac{a\cos\frac{k}{2}(U+V)\left[1+l\sin\frac{k}{2}(U+V)\right]+b\left[\sin\frac{k}{2}(U+V)+l\right]+d\cdot\cos^2\left[\frac{k}{2}(U+)\right]}{\left[\sin\frac{k}{2}(U+V)+l\right]\sqrt{[a\sin(kU)+b]\,[a\sin(kv)+b]}}.$$

Mit (40) ist ferner $E=\frac{1}{\sqrt{fg}}$ gegeben und A folgt aus (22), (23). Da die sämtlichen Lösungen der obigen Funktionalgleichung bereits von Herrn Volk [4]) angegeben wurden, sollen die übrigen Lösungen nicht weiter betrachtet werden.

---

[4]) O. Volk, Über Flächengruppen mit rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, 1934, 17. Abh.

Lebenslauf.

Ich, Willibald Grehn, bin geboren am 20. Februar 1905 zu Schweinfurt als Sohn des (im Jahre 1911 verstorbenen) Volksschullehrers Ewald Grehn und seiner Ehefrau Meta, geb. Sotier. Von 1911 bis 1915 besuchte ich die Volksschule zu Schweinfurt, von 1915 bis 1924 das Realgymnasium zu Würzburg, das ich im Jahre 1924 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Während der nun folgenden Jahre 1924 bis 1928 widmete ich mich dem Studium der Mathematik, Physik und Astronomie an der Universität Würzburg und besuchte während dieser Zeit Vorlesungen und Übungen bei den Herren Harms, Hilb, Meyer, Rost, Wagner und v. Weber. Im Jahre 1928 bestand ich den 1. Abschnitt und, nach einjähriger Teilnahme am pädagogisch-didaktischen Seminar der Oberrealschule Würzburg, den 2. Abschnitt der Prüfung für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik. Während des Schuljahres 1929/30 war ich zur Ableistung des staatlichen Vorbereitungsdienstes der Oberrealschule Würzburg zugewiesen und zur Aushilfe an den folgenden Schulen verwendet: Oberrealschule Schweinfurt, Altes Gymnasium Würzburg, Oberrealschule Coburg und humanistisches Gymnasium Eichstätt. In den Jahren 1930 bis 1933 war ich Lehrer für Mathematik und Physik an der Schule „Landschulheim am Solling“ bei Holzminden a. d. Weser. Seit dem Sommersemester 1933 bin ich als Assistent am mathematischen Seminar und am astronomischen Institut der Universität Würzburg angestellt, wo ich noch tätig bin.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Herrn Geheimrat Rost und Herrn Professor Volk, deren persönliche Anregung ich in den letzten Jahren genießen durfte, bin ich zu immerwährendem Dank verpflichtet.